



# Analisi modale ragionata

Teoria e pratica. Metodi, problemi, procedure di modellazione e calcolo

Contiene CD con software SARGON® versione LITE per strutture fino a 50 nodi (analisi statiche, modali ed a spettro di risposta)

**Paolo Rugarli**

Un volume chiaro, completo e comprensibile, interamente dedicato all'analisi modale e alle analisi che questa utilizzano, spiegate non solo dal punto di vista teorico, ma anche e soprattutto mettendo in evidenza i problemi di modellazione e le difficoltà che l'analista si trova a dover affrontare in pratica. Ogni aspetto viene discusso e motivato con uno sforzo di ragionamento che è il principale obiettivo del lavoro. Un libro che colma un vuoto rilevante discutendo moltissimi aspetti generalmente non affrontati nei testi teorici, venendo così incontro ai professionisti che non hanno potuto seguire corsi specifici su questo argomento o che vogliono ampliare le loro conoscenze su questo importante aspetto del calcolo. Il volume nasce proprio dalla volontà di discutere e spiegare in modo comprensibile cosa sia e come funzioni un'analisi modale, favorendo un uso più consapevole degli strumenti di calcolo a disposizione del progettista. Oltre all'analisi modale è discussa anche l'analisi a spettro di risposta. Esempi pratici tratti da casi reali di assistenza tecnica, consigli operativi, test comparativi: il libro è uno strumento operativo di grande utilità per approfondire e conoscere meglio l'analisi modale. Importante anche il CD allegato al volume, che contiene una versione limitata a 50 nodi ma completamente funzionante del software di calcolo agli elementi finiti Sargon, per Windows, sviluppato dall'Autore nel corso di un lavoro di quindici anni presso la società Castalia s.r.l.. Completano il volume varie appendici tra le quali una dedicata alle formule approssimate sui periodi ed una che contiene un dizionarietto dei termini più comuni.

# INDICE GENERALE



Premessa.....	17
<hr/>	
CAPITOLO 1	
INTRODUZIONE.....	19
1.1 Scopi del lavoro.....	19
1.2 Realtà e modello .....	22
1.3 Modelli e probabilistica .....	27
1.3.1 Probabilità soggettiva e probabilità oggettiva.....	29
1.3.2 Fenomeni aleatori non campionabili o non ripetibili .....	34
1.3.3 Ibridazione dell'approccio probabilistico .....	35
1.3.4 Incompletezza delle campionature statistiche.....	35
1.4 La via di mezzo .....	36
<hr/>	
CAPITOLO 2	
OSCILLATORI SEMPLICI .....	39
2.1 Le equazioni basilari della dinamica .....	39
2.2 Oscillazioni libere in assenza di smorzamento (OL).....	43

2.3	Oscillazioni libere con smorzamento viscoso equivalente (OL-SVE)	48
2.4	Oscillazioni libere con smorzamento dovuto ad attrito (OL-SDA)	55
2.5	Oscillazioni forzate (forzante armonica) in assenza di smorzamento (OFFA)	58
2.6	Oscillazioni forzate (forzante armonica) con smorzamento viscoso equivalente (OFFA-SVE)	59
2.7	Una breve divagazione	68
2.8	Risposta dell'oscillatore semplice all'impulso	72
2.9	Risposta dell'oscillatore semplice al carico a gradino	73
2.10	Risposta dell'oscillatore semplice a una forzante qualsiasi (integrale di Duhamel)	74
2.11	Risposta dell'oscillatore semplice al sisma	75
2.11.1	Approccio a time history	75
2.11.2	Approccio a spettro di risposta	81
2.11.3	Dagli spettri elastici a quelli di progetto	90
2.11.4	Il ruolo dell'errore nell'uso degli spettri di risposta	96
2.11.4.1	Fattore di errore sul coefficiente sismico	96
2.11.4.2	Fattore di errore sullo spostamento massimo	98
2.11.4.3	Fattore di errore sulla massima forza di richiamo	98
2.11.4.4	Limite inferiore a C, $C > 0.2 a_g/g$	99
2.11.4.5	Il programma SPE (SPectrum Error)	102

---

## CAPITOLO 3

OSCILLATORI MULTIPLI (ANALISI MODALE)	105
3.1 Premessa	105
3.2 Richiami sul Metodo degli Elementi Finiti	107

3.2.1	<i>Generalità</i> .....	107
3.2.2	<i>Conservazione dell'energia</i> .....	113
3.2.3	<i>Energia potenziale elastica</i> .....	114
3.2.4	<i>Energia cinetica</i> .....	116
3.2.5	<i>Potenziale dei carichi applicati</i> .....	118
3.2.6	<i>Equazioni canoniche</i> .....	120
3.3	Le equazioni della analisi modale: oscillazioni libere non smorzate (OL) .....	122
3.3.1	<i>Analisi modale</i> .....	122
3.3.2	<i>Ortogonalità dei modi</i> .....	130
3.3.3	<i>Normalizzazione</i> .....	136
3.3.4	<i>Ulteriori sviluppi: coordinate principali</i> .....	137
3.3.5	<i>Sull'importanza relativa dei vari modi</i> .....	140
3.3.6	<i>Autovettori multipli</i> .....	145
3.3.7	<i>Sulle tracce di Lord Rayleigh</i> .....	147
3.4	Oscillazioni libere con smorzamento viscoso equivalente (OL-SVE).....	150
3.4.1	<i>Sistemi disaccoppiabili e non disaccoppiabili</i> .....	150
3.4.2	<i>OL-SVE per sistemi disaccoppiabili</i> .....	152
3.5	Oscillazioni forzate, non smorzate, forzante armonica (OFFA) .....	153
3.6	Oscillazioni forzate, forzante armonica, smorzamento viscoso equivalente (OFFA-SVE).....	155
3.7	Risposta ad una forzante qualsiasi .....	161
3.8	Risposta all'impulso .....	162
3.9	Risposta al sisma (time history lineare) .....	165
3.10	Breve panoramica sui metodi di calcolo basati sull'analisi modale.....	169
3.10.1	<i>Problemi tipici dell'analisi modale</i> .....	172



---

## CAPITOLO 4

MODELLAZIONE LATO RIGIDEZZA .....	175
4.1 Rigidezza globale e rigidezza locale.....	175
4.1.1 <i>La parabola dell'albero di Natale</i> .....	175
4.1.2 <i>Cosa modellare e cosa no</i> .....	180
4.1.2.1 <i>Esame di situazioni globali</i> .....	181
4.1.2.2 <i>Esame di situazioni locali</i> .....	182
4.1.3 <i>Identità tra modello statico e dinamico</i> .....	185
4.2 Labilità, pseudo labilità, quasi labilità .....	187
4.2.1 <i>Labilità ed ipostaticità</i> .....	187
4.2.2 <i>Pseudo labilità</i> .....	190
4.2.3 <i>Quasi labilità</i> .....	193
4.3 Il ruolo della formulazione degli elementi.....	194
4.4 Il ruolo della mesh .....	195
4.4.1 <i>Introduzione</i> .....	195
4.4.2 <i>Travi</i> .....	196
4.4.2.1 <i>Travi Appoggiate-appoggiate</i> .....	197
4.4.2.1.1 <i>Massa uniformemente distribuita,</i> <i>senza effetto del taglio (<math>H = 1/20 L</math>)</i> .....	197
4.4.2.1.2 <i>Massa uniformemente distribuita,</i> <i>con effetto del taglio (<math>H=1/20 L</math>)</i> .....	197
4.4.2.2 <i>Mensole</i> .....	198
4.4.2.2.1 <i>Massa uniformemente distribuita,</i> <i>senza effetti del taglio (<math>H = 1/20 L</math>)</i> .....	198
4.4.2.2.2 <i>Massa uniformemente distribuita,</i> <i>con effetti del taglio (<math>H = 1/20 L</math>)</i> .....	200
4.4.2.3 <i>Travi continue</i> .....	201
4.4.2.3.1 <i>Trave a tre campate eguali, senza effetti del taglio,</i> <i>massa uniformemente distribuita</i> .....	201
4.4.2.3.2 <i>Cinque campate eguali, senza effetti del taglio</i> .....	202

4.4.3	Telai .....	202
4.4.3.1	Quattro piani massa distribuita sulle travi .....	203
4.4.3.2	Quattro piani massa distribuita sulle colonne .....	204
4.4.3.3	Dieci piani, massa distribuita sulle travi .....	205
4.4.4	Membrane .....	206
4.4.5	Pareti .....	206
4.4.5.1	Parete con $H/B = 4$ .....	207
4.4.5.2	Parete con $H/B = 8$ .....	209
4.4.5.3	Conclusioni .....	212
4.4.6	Piastre .....	212
4.4.6.1	Piastra sottile (DKT e 4DKT) .....	213
4.4.6.2	Piastra spessa (Hughes) .....	215
4.4.6.3	Conclusioni .....	216
4.4.7	Distorsione degli elementi .....	216
4.4.7.1	Membrane: pareti .....	217
4.4.7.2	Piastre .....	220
4.4.8	Remeshing .....	222
4.5	Il ruolo della geometria .....	222
4.5.1	Dimensioni geometriche.....	222
4.5.2	Estremi rigidi degli elementi nei sistemi intelaiati.....	223
4.5.3	Fuori piombo nei telai.....	226
4.6	Il ruolo delle costanti di materiale .....	227
4.6.1	Costanti di materiale e precisione .....	227
4.6.1.1	Travi .....	228
4.6.1.2	Piastre .....	230
4.6.1.3	Errore sul modulo di Young .....	231
4.6.1.3.1	Acciaio .....	231
4.6.1.3.2	Calcestruzzo.....	232
4.7	Il ruolo della interazione suolo-struttura .....	235



---

## CAPITOLO 5

MODELLAZIONE LATO MASSA.....	239
5.1 Unità di misura.....	239
5.2 Masse traslazionali e momenti di inerzia, masse direzionali .....	242
5.2.1 Masse traslazionali e rotazionali.....	242
5.2.2 Masse direzionali.....	244
5.3 Approccio <i>lumped</i> e <i>consistent</i> .....	245
5.4 Masse nulle.....	248
5.5 Generazione automatica delle masse.....	249
5.6 Quantità di massa, combinazioni sismiche .....	252
5.7 Posizionamento, ad hoc lumping .....	258
5.8 Effetto della distribuzione di massa .....	267
5.8.1 <i>Analisi del problema</i> .....	267
5.8.2 <i>Valutazione approssimata della variazione di periodo dovuta a una variazione delle masse</i> .....	268
5.8.2.1 <i>Variazione di intensità a parità di distribuzione</i> .....	268
5.8.2.2 <i>Variazione di distribuzione a parità di intensità</i> .....	269
5.8.3 <i>Valutazione approssimata della variazione della forma modale dovuta a una variazione di massa</i> .....	274
5.9 Eccentricità delle masse .....	276
5.9.1 <i>Classificazione delle eccentricità</i> .....	276
5.9.2 <i>Il ruolo dell'ipotesi di piani rigidi nella applicazione di eccentricità impreviste</i> .....	277
5.9.3 <i>Eccentricità propria</i> .....	278
5.9.4 <i>Eccentricità imprevista ("accidental eccentricity")</i> .....	279
5.9.4.1 <i>Distribuzioni eccentriche di massa per piante rettangolari: <math>e=5\%L</math></i> .....	280
5.9.4.1.1 <i>Eccentricità in una sola direzione</i> .....	281
5.9.4.1.2 <i>Eccentricità in due direzioni</i> .....	283

5.9.4.2	<i>Eccentricità imprevista: modellazione in pratica</i>	284
5.9.5	<i>Momenti torcenti dovuti ai carichi variabili</i>	284
5.9.6	<i>Distribuzioni statiche atte a sposare eccentricità di valore dato</i>	287
5.9.6.1	<i>Distribuzione a gradino</i>	288
5.9.6.2	<i>Distribuzione a !</i>	288
5.9.6.3	<i>Distribuzione a trapezio</i>	288

---

## CAPITOLO 6

	MODELLAZIONE LATO SMORZAMENTO	289
6.1	Premessa	289
6.2	Smorzamento alla Rayleigh	290
6.3	Smorzamento alla Caughey	294
6.4	Smorzamento modale ( <i>light damping approximation</i> )	294
6.5	Cause dello smorzamento nelle strutture	296
6.6	Cenni alle tecniche di valutazione sperimentale dello smorzamento	299
6.7	Valutazione a priori dello smorzamento	301
6.7.1	<i>Fonti varie</i>	302
6.7.2	<i>Formule ESDU 1983</i>	304
6.7.3	<i>Lo studio di Lagomarsino (1993, [59])</i>	306
6.7.3.1	<i>Il campione statistico analizzato</i>	306
6.7.3.2	<i>Formule predittive sul periodo</i>	308
6.7.3.3	<i>Formule predittive sullo smorzamento</i>	309
6.7.4	<i>Lo studio di Satake e altri (2003, [60])</i>	310
6.7.4.1	<i>Risultati relativi al periodo di vibrare</i>	311
6.7.4.2	<i>Risultati relativi allo smorzamento del primo modo</i>	313
6.7.4.3	<i>Risultati relativi allo smorzamento dei modi successivi</i>	314



6.7.4.4	<i>Influenza della destinazione d'uso</i>	314
6.7.4.5	<i>Formule predittive finali</i>	315
6.7.5	<i>Conclusioni sulla valutazione a priori</i>	317

---

## CAPITOLO 7

	CENNI ALLE TECNICHE RISOLUTIVE	321
7.1	Introduzione	321
7.2	Shift	323
7.3	Metodi di calcolo di autovalori ed autovettori	324
7.3.1	<i>Subspace iteration</i>	324
7.3.2	<i>Metodo di Lanczos</i>	326
7.3.3	<i>Metodo di Jacobi</i>	328
7.4	Controllo di sequenza di Sturm	330
7.5	Tecniche di riduzione	332
7.5.1	<i>Guyan reduction</i>	332
7.5.2	<i>Component mode synthesis</i>	334

---

## CAPITOLO 8

	ANALISI PRATICA DELLA RISPOSTA MODALE	337
8.1	Forme modali ai fini della analisi statica	337
8.2	Forme modali ai fini della analisi dinamica	344
8.2.1	<i>Generalità</i>	344
8.2.2	<i>Simmetria</i>	344
8.2.3	<i>Regolarità, isotropia, isocronia</i>	345

8.2.4	<i>Discontinuità</i> .....	346
8.2.5	<i>Fattori di partecipazione e forme modali</i> .....	350
8.2.6	<i>Torsione</i> .....	352
8.3	Modi irrilevanti o spurii .....	353
8.4	Periodi .....	357
8.5	Percentuale di massa partecipante.....	363
8.6	Frequenza massima estratta.....	364
8.7	Difficoltà a convergere.....	365
8.8	Casi discussi.....	365
8.8.1	<i>La nave coi nodi puramente traslanti</i> .....	365
8.8.2	<i>Il controvento che non controventava</i> .....	370
8.8.3	<i>Il condotto oscillante</i> .....	374
8.8.4	<i>Variazioni su un modello</i> .....	380
8.8.4.1	<i>Multi 1</i> .....	381
8.8.4.2	<i>Multi 2</i> .....	385
8.8.4.3	<i>Multi 3</i> .....	388
8.8.4.4	<i>Multi 4</i> .....	392
8.8.4.5	<i>Multi 5</i> .....	394
8.8.4.6	<i>Multi 6</i> .....	397
8.8.4.7	<i>Multi 7</i> .....	399
8.8.4.8	<i>Multi 8</i> .....	401

---

## CAPITOLO 9

	ANALISI A SPETTRO DI RISPOSTA.....	403
9.1	Come funziona il metodo .....	403
9.2	Spettro di risposta "di progetto": il fattore di struttura.....	416
9.2.1	<i>Cosa è il fattore di struttura</i> .....	416



9.2.2	<i>Dagli spettri di risposta elastici agli spettri di progetto</i> .....	426
9.3	Spettro di risposta con fattore di errore .....	428
9.3.1	<i>Errore sul fattore di struttura</i> .....	429
9.3.2	<i>Errore sulla frequenza/periodo</i> .....	431
9.3.2.1	<i>Errore sullo spostamento</i> .....	432
9.3.2.2	<i>Fattore di errore sul taglio alla base</i> .....	436
9.3.2.3	<i>Fattore di errore sulle azioni interne</i> .....	437
9.3.3	<i>Riepilogo dei fattori di errore</i> .....	437
9.3.4	<i>Esempi di calcolo, controlli sulle formule trovate</i> .....	439
9.3.4.1	<i>Studio n. 1</i> .....	439
9.3.4.2	<i>Studio n. 2</i> .....	442
9.3.4.3	<i>Studio n. 3</i> .....	443
9.3.5	<i>Conclusioni: il metodo dello spettro di risposta con fattore di errore</i> .....	444
9.4	La combinazione dei modi .....	446
9.4.1	<i>Il problema</i> .....	446
9.4.2	<i>Metodi di combinazione quadratica</i> .....	447
9.4.2.1	<i>SRSS</i> .....	450
9.4.2.2	<i>SRSS CON CLUSTER FACTOR</i> .....	450
9.4.2.3	<i>CQC</i> .....	451
9.4.2.4	<i>Osservazioni</i> .....	452
9.5	Cenni al metodo detto "push over" .....	454
9.6	Verifiche ed analisi a spettro di risposta .....	460
9.6.1	<i>Il problema dei segni e delle distribuzioni</i> .....	460
9.6.2	<i>Possibili correzioni</i> .....	464
9.6.2.1	<i>Correzioni locali</i> .....	464
9.6.2.2	<i>Correzioni globali</i> .....	464
9.6.3	<i>Il metodo di amplificazione modale</i> .....	465

<hr/>	
CAPITOLO 10	
RIFERIMENTI .....	469
<hr/>	
APPENDICE I	
PERIODI DI VIBRAZIONE .....	477
<hr/>	
APPENDICE II	
DIZIONARIO MINIMO.....	485
<hr/>	
APPENDICE III	
PRINCIPALI SIMBOLI.....	493
<hr/>	
APPENDICE IV	
NOTAZIONE RICHIAMI DI CALCOLO.....	497
<hr/>	
APPENDICE V	
II SOFTWARE SUL CD.....	501
Installazione, disinstallazione .....	503
Brevi note sulla analisi modale.....	504
Indice analitico .....	505



# PREMESSA

*Quando circa tre anni fa cominciai a scrivere il libro Calcolo Strutturale con gli elementi Finiti, mi proponevo il compito di spiegare in modo comprensibile cosa fosse e come funzionasse il Metodo degli Elementi Finiti, spinto in ciò dalla consapevolezza che molti Colleghi non avevano avuto modo di conoscere le basi di una metodologia che pure, come sappiamo, oggi è ampiamente usata.*

*Benché sinteticamente affrontato, il testo divenne tale da non poter contenere tutte le cose che sarebbero state logicamente parte del volume. Questo secondo volume continua quindi il lavoro iniziato, cercando di spiegare in modo piano ed accessibile cosa sia, come funzioni e cosa debba attendersi dall'analisi modale e dall'analisi a spettro di risposta.*

*Mentre facevo questo lavoro, avendo l'obiettivo di essere chiaro, mi sono reso conto che un testo realmente sincero non poteva prescindere da una esplicita trattazione dell'errore, visto come una delle incognite fondamentali con la quale l'ingegnere o l'analista deve rapportarsi. Da qui l'idea di trattare esplicitamente le più frequenti cause d'errore dando loro dignità di protagonista, e non di semplice comparsa, come di fatto avviene normalmente. L'ingegnere per mestiere quantifica in modo ragionato e sensato cose che non può definitivamente conoscere, perché sono inconoscibili, quindi l'errore entra come protagonista e non come comparsa nei suoi ragionamenti. Mi sono permesso di cercare di ricordarlo a me e a chi leggerà.*

*Ho voluto provare a non limitarmi alla mera ripetizione delle formule, e mi sono sforzato di illustrarne il significato ed i limiti.*

*Sicuramente tentativi di questo tipo possono essere accusati di semplicismo, di approssimazione, di presunzione, ma sono convinto che le idee base, quelle*



*che veramente governano tutti i problemi, possano essere spiegate con semplicità e senza scandalo anche demistificando procedure spesso inutilmente complesse.*

*Il Lettore vorrà comprendere questo intento costruttivo e scusare le mancanze di questo testo.*

*Desidero ringraziare i miei familiari, ai quali ho sottratto non poco tempo che sarebbe stato dedicato allo svago: mia moglie Roberta, i miei figli Francesco e Stefano. La signora Maria Caporali, che ha composto questo testo con ammirabile pazienza.*

*Desidero anche ringraziare la signora Laura Lavarello, direttore della collana "Quaderni per la progettazione", poiché ha creduto che potessi fare un buon lavoro e mi ha dato l'opportunità di farlo in piena libertà.*

*Mentre sicuramente le eventuali pessime idee contenute in questo testo sono interamente responsabilità mia, molte buone idee in esso contenute derivano anche dalla discussione con Colleghi ed Esperti coi quali ho avuto il privilegio di parlare, e che certamente mi hanno molto aiutato; a tutti loro il mio sentito "grazie"*

*L'Autore*

*Milano, settembre 2005*

# INTRODUZIONE

*Infine facciamo alcune osservazioni sul perché i sistemi lineari sono tanto importanti. La risposta è semplice: perché possiamo risolverli! Così il più delle volte risolviamo sistemi lineari. Secondo (e importantissimo), risulta che le leggi fondamentali della fisica sono spesso lineari.*

Richard P. Feynman – Lectures on Physics

## 1.1 Scopi del lavoro

Questo volume si riferisce alla modellazione di strutture mediante il metodo degli elementi finiti, nell'ambito delle problematiche relative alla analisi modale. L'Analisi Modale di una struttura modellata con il Metodo degli Elementi Finiti è quindi il centro di questo lavoro, ed il principale argomento che si desidera trattare.

Già in occasione del capitolo introduttivo di un precedente volume [1] si era posto in rilievo che vi è un profondo contrasto tra la diffusione delle metodologie di calcolo agli elementi finiti e la loro reale conoscenza, e questo vale a maggior ragione anche per le analisi modali e le analisi che partendo da queste procedono verso ulteriori risultati: analisi a spettro di risposta, analisi di risposta in frequenza ed analisi di time history fatte sfruttando la analisi modale.

Le ragioni di questa ignoranza sono numerose: da un lato moltissimi professionisti non hanno avuto modo di seguire corsi sull'argomento Elementi Finiti, e meno ancora sull'argomento Analisi Modale; dall'altro il panorama dei testi esistenti sull'argomento si divide sostanzialmente in due: ci sono meravigliosi testi teorici, in specie in lingua inglese<sup>1</sup>, i quali richiedono uno sforzo considerevole per essere compresi. Eppoi ci sono testi che ripetono quelli teo-

---

1. Ad esempio si citano i classici testi [2], [3], [4], [5], tutti in lingua inglese.



rici limitandosi a trascrivere le formule, senza spiegare perché abbiano quella forma, da dove vengano, cosa implicino.

In lingua italiana non pare ci sia alcun testo che discuta degli aspetti *reali, pratici* dell'analisi modale. La natura del percorso che porta l'analista dal modello al risultato non è riferibile ad equazioni formalmente nitide quali quelle dei testi teorici, ma piuttosto alla messa in atto di strategie legate ad una approfondita conoscenza di varie discipline: la teoria, sì, ma anche l'esperienza di calcolo numerico, di ingegneria strutturale, di meccanica computazionale, di modellistica, di cantiere, ecc. ecc..

L'analisi modale è spesso presentata come un problema agli autovalori in cui la matrice delle masse e quella delle rigidezze arrivano come meteore senza che venga in alcun modo spiegato tutto quello che occorre fare per costruirle. La risposta strutturale si presenta sempre nitida, chiaramente leggibile, le ipotesi sono spesso così semplificate che non mettono conto di essere prese come realistico banco di prova per alcunché. La discussione sembra nella maggior parte dei casi assente.

Invece, a quanto risulta, è ben diverso mettere la massa in un modo o in un altro; modellare certe cose o altre; assumere o meno l'esistenza di simmetrie; usare una discretizzazione o un'altra; assumere che i piani siano rigidi, oppure no, e così via.

Dato questo panorama, è in qualche misura comprensibile che un'analisi modale risulti, per alcuni Colleghi, un'operazione paragonabile alla interrogazione della Sibilla Cumana.

Questo lavoro vuol cercare di spiegare cosa sia e come funzioni *in realtà* una analisi modale, cercando di spiegare le metodologie e le formule in modo piano e comprensibile: già molti altri testi - teorici - fanno il lavoro di discutere formalmente gli algoritmi e di enunciare le regole, non era minimamente il caso di scrivere una brutta copia dei testi classici, di fronte ai quali, quando sono classici veramente, è appena il caso di dire che l'atteggiamento dell'Autore è quello che ha un grato discepolo.

Il volume è diviso in 10 capitoli: nei primi 8 si discute di analisi modale, anche toccando argomenti come la risposta a forzanti armoniche e la risposta all'impulso, nel cap. 9 specificamente di analisi a spettro di risposta per sistemi a molti gradi di libertà. Il cap. 10 raccoglie i riferimenti. Le appendici servono per consultazione, e sono la Appendice I, dedicata alle formule approssimate per valutare i periodi di vibrazione; la appendice II contenente un dizionarietto minimo (nel quale si sono anche aggiunti acronimi e sigle inglesi che si posso-

no incontrare nella sterminata letteratura sul tema); l'appendice III contenente la lista dei simboli; l'appendice IV contenente brevi richiami sul calcolo matriciale; l'appendice V dedicata alla spiegazione di cosa sia sul CD, vale a dire essenzialmente del software denominato Sargon, scritto dall'Autore a partire dal 1991 e presente in versione limitata a 50 nodi ed illimitati elementi.

Entrando più nel dettaglio, la prima parte comincia con un capitolo introduttivo necessario per dare conto della posizione dell'Autore su alcune importanti ed attuali questioni; il capitolo 2 riepiloga le equazioni ed i risultati fondamentali relativi all'oscillatore semplice, includendo l'analisi a spettro di risposta per oscillatori semplici. Il capitolo 3 introduce le equazioni della analisi modale passando per un brevissimo riepilogo relativo al metodo degli elementi finiti.

In pratica i capitoli 2 e 3 riepilogano i risultati teorici necessari a comprendere il problema. Il terzo capitolo è da intendersi come uno sforzo per cercare di spiegare i fondamenti matematici della analisi modale in modo possibilmente comprensibile.

Il quarto capitolo si occupa della modellazione lato rigidzze, vale a dire di "tutto" quello che è necessario per arrivare alla matrice di rigidzza **K**. Particolare attenzione viene rivolta ad indagare le cause di errore, incluso un accenno al problema della interazione suolo-struttura. La casistica potrebbe essere sterminata, si reputa comunque di aver trovato un buon compromesso tra l'esigenza della completezza e quella della sintesi.

Il quinto capitolo tratta della modellazione lato masse, ovvero della matrice **M**. Fa parte di questo capitolo una discussione sul problema della eccentricità accidentale ed una serie di possibili suggerimenti su come modellarla in pratica. Il problema della eccentricità "accidentale" è ancora oggetto di ricerca, e quindi su questo argomento bisognerà aspettare ancora per avere metodologie facili ed a favore di sicurezza.

Il sesto capitolo riguarda la modellazione lato smorzamenti (matrice **C**). Poiché in questo caso è necessario impiegare valori ottenuti per analogia (valutazione *a priori*) si è cercato di dare una piccola panoramica sui valori proposti in letteratura nel caso degli edifici. Ciò ha richiesto di citare per esteso alcuni importanti lavori che costituiscono ad oggi un riferimento obbligato, stante la grande carenza di dati. L'Autore ritiene che la conoscenza di questi studi sia molto importante per potersi fare una idea indipendente sul reale grado di conoscenza che abbiamo dei problemi di dinamica strutturale. Per questo ha ritenuto di dover citare ampiamente i risultati ed anche di riportare alcune immagini per come figurano in questi lavori.



Il settimo capitolo cerca di fornire informazioni di base sulle tecniche di soluzione e di riduzione ed evidenziazione, vale a dire quelle tecniche che consentono di ottenere problemi numerici di dimensioni minori o di estrarre più rapidamente i risultati che interessano. Su questi aspetti non si è ritenuto di dover insistere particolarmente, poiché in genere i dettagli computazionali spettano agli sviluppatori ed ai ricercatori, più che agli utilizzatori: nondimeno alcune idee base sono indispensabili per capire cosa sta succedendo. Queste idee di base si è cercato di fornire.

L'ottavo capitolo si occupa della analisi della risposta, in termini di forme modali, di periodi e di tolleranze: cerca insomma di spiegare come capire i risultati, come interpretarli e trarne spunto per migliorare l'analisi. In questo capitolo sono anche presentati e discussi casi reali. Anche questo argomento sarebbe sterminato, ci si è dovuti giocare per limitare ad alcuni esempi particolarmente significativi.

Il capitolo 9 riguarda l'analisi a spettro di risposta per sistemi a molti gradi di libertà, e discute tutti gli aspetti pratici che ne rendono assai ostico il reale utilizzo: paragrafi chiave sono quelli relativi alle verifiche e quelli relativi alla combinazione dei modi, essendo, come si vedrà, tanto semplice quanto geniale l'idea di base. Viene presentato un metodo di utilizzo dello spettro di risposta (spettro di risposta con fattore di errore) che è la logica conseguenza del discorso sull'errore portato avanti in tutto il testo. Completa il capitolo una discussione di massima sul metodo detto "push over", presentando alcuni importanti risultati comparativi disponibili in letteratura e – forse – ancora poco noti ai non addetti ai lavori.

Il capitolo 10 contiene i riferimenti. Si sono distinti i riferimenti direttamente consultati (la gran parte) da quelli giocoforza citati indirettamente. Citare indirettamente una fonte è cosa da non fare, ma non è purtroppo possibile trovare tutto quello che si desidererebbe.

Benché il testo non presuma la approfondita conoscenza del Metodo degli Elementi Finiti, sarebbe bene che alcuni concetti base risultino chiari: a questo proposito viene spontaneo riferirsi, per l'analogia di concezione, al precedente volume [1], anche se esistono naturalmente anche tanti altri testi sull'argomento, ciascuno con taglio diverso.

## 1.2 Realtà e modello

Prima di cominciare la lettura sarà bene che il lettore sia consapevole del punto di vista dell'Autore in merito al problema legato alla attendibilità ed alla

natura stessa dei modelli. Il discorso non è ozioso: in questi anni stiamo vivendo una stagione di eccessi che sono destinati a portare a seri inconvenienti.

Il primo eccesso è legato alla errata credenza che tutto possa essere equivalentemente proposto come accettabile: nella cosiddetta "società civile", la negromanzia, la chiromanzia, la stregoneria (tale dovremo chiamare la messa in pratica di attività per mettere o togliere il malocchio), la astrologia, la cartomanzia e via discorrendo, sono purtroppo ampiamente diffuse. Tutto ha spazio e diritto ad essere udito. Le televisioni danno spazio e cittadinanza, vorrei dire dignità, a pratiche che sono degne dei secoli più bui della nostra storia, e nessuno pare abbia da obiettare. I giornalisti televisivi, quando non camminano sui carboni ardenti, montano intere trasmissioni allo scopo di "fare ascolto" con solenni ottusità, e siccome purtroppo ci sono anche i deboli, gli ignari e i delinquenti, effettivamente diverse persone sono state uccise per fare "riti satanici" o idiozie del genere.

Il ragionamento scientifico è vissuto come una specie di arrogante e superba miopia che non consentirebbe di dare spazio a "fenomeni" dei quali si postula non soltanto la piena esistenza, ma addirittura la sostanziale insondabilità, salvo poi, all'atto pratico, convergere verso i portafogli dei creduloni che vengono in tal modo a pagare duramente. Purtroppo anche l'ingegnere strutturista si trova indirettamente a fare i conti con gli echi di simili atteggiamenti mentali, quando il tentativo di mettere ordine e di dare razionalità e affidabilità al costruito si scontra con affermazioni del tipo "ma tanto sta su", "eh ma non nevicava" "il terremoto?", "ho sempre fatto così", ecc. ecc.. Ragionamenti di questo tipo rifiutano il controllo del calcolo e della regola di progetto e si affidano piuttosto alla fortuna, o, in modo più insidioso, alla tradizione, che però non sempre esiste effettivamente, e purtroppo, se esiste, non è più quella dei grandi costruttori che ci hanno preceduto. Questi effettivamente di calcoli ne facevano pochi, ma certe regole le rispettavano a puntino perché le ereditavano da una tradizione lunga decine di secoli, e certo non mettevano, come sempre più spesso facciamo noi, i primi poveretti in cerca di lavoro a murar mattoni o a colar calcestruzzo armato.

Le costruzioni furono una cosa seria, un tempo.

Ad esempio, in epoca romana i muratori appartenevano a una vera e propria associazione professionale (e chi abbia presente i muri romani non se ne stupisce), mentre oggi tante persone in frangenti di vita sfortunati vengono prese e prelevate per portarle ai cantieri, senza che la loro formazione professionale possa minimamente essere neppure presa in esame: sarebbe quasi



ridicolo, oggi, parlare in Italia della formazione professionale degli operai edili e delle imprese. Oggi chiunque costruisce.

Tutti hanno esperienza dei madornali errori che frequentemente vengono commessi in cantiere, dove il personale è purtroppo impreparato e dove la messa in opera di un progetto aderente ai disegni costruttivi sembra impresa ardua per non dire impossibile.

“Tanto sta su”. “Tanto è su da dieci anni”. E via discorrendo. La realtà è qualitativa, i giudizi sono privi di alcun vaglio scientifico o di controllo quantitativo.

Il secondo eccesso è l'eccesso opposto, e consiste nell'ontologizzare i modelli sino a renderli realtà oggettiva. Il modello “è la realtà”, e quindi solo calandosi in esso sarà possibile comprendere qualcosa. Ciò che dice il modello è creduto sino in fondo, e se il modello è complesso tanto peggio: si farà ricorso a procedure di calcolo più sofisticate e potenti. Alfieri di questo eccesso sono alcuni esperti, che hanno dimenticato alcune considerazioni fondamentali e credono alle loro equazioni sino al punto di sostenerne a spada tratta la necessità ben oltre la loro effettiva pregnanza nei casi reali per i quali sono state proposte.

Relativamente ai modelli ed alla fideistica loro presunzione di infallibilità vale dunque la pena di dire alcune cose.

Noi non sappiamo nulla di cosa sia esattamente la realtà. I nostri più riusciti modelli scientifici non ci dicono *come* o *cosa* sia la realtà, ma inventano una rappresentazione possibile della realtà, una interpretazione possibile, una “favola” (altri hanno parlato più pudicamente di “mito”<sup>2</sup>, la parola di uso corrente è “modello”) capace di sposare la realtà sperimentale. Se la favola sposa correttamente la realtà sperimentale, allora viene accettata, se non la sposa viene rifiutata. Tra due favole che sposano egualmente la realtà sperimentale, viene preferita normalmente quella che “spiega” più cose, e a parità di generalità viene preferita la più semplice, la più elegante.

L'opinione di chi scrive è che l'elettrone non esista più di quanto esiste Pinocchio, e così il tensore di sforzo o quello di deformazione: essi sono invenzioni culturali, non sono la “realtà fisica”. La fisica ha dato numerose volte prova della verità di questo assunto (si pensi ad esempio alla ascesa e caduta della fisica classica e della interpretazione meccanicistica, oppure al tramonto della interpretazione puramente corpuscolare della luce). Popper ha spiegato emi-

---

2. Il fisico teorico Gabriele Veneziano: “Abbiamo creduto per decenni al mito del Big Bang. E invece forse l'universo esiste da sempre”, *La Repubblica*, 9-1-2005.

mentemente che un enunciato è scientifico se è falsificabile, se cioè è assoggettabile al controllo sperimentale, e quindi refutabile. Pensiamo ad esempio al modello corpuscolare della luce ed a quello ondulatorio, ai quark, alla teoria della gravitazione universale, alla fisica quantistica: nessuna di queste teorie ha la pretesa di dire cosa sia la realtà, ma solo di spiegare le osservazioni sperimentali: la diffrazione, la rifrazione, le tracce lasciate in un "rivelatore di particelle", e via discorrendo. La teoria della relatività è sorta per spiegare il fatto che la velocità della luce non cambiava da sistema di riferimento a sistema di riferimento, come invece predetto dalla fisica classica. Einstein sosteneva [13]:

"La scienza rappresenta il tentativo di far corrispondere la varietà caotica della nostra esperienza sensibile a un sistema di pensiero logicamente uniforme [...]. Le esperienze sensibili sono l'oggetto di partenza, ma la teoria che le interpreta è opera dell'uomo. E' il risultato di un processo di adattamento straordinariamente laborioso: ipotetico, mai completamente definitivo, sempre soggetto a discussioni e a dubbi".

Questo per quanto riguarda il lavoro degli scienziati.

Ma noi non siamo scienziati, noi siamo ingegneri, e quindi le nostre pretese devono essere ancora minori. La nostra pretesa di formalizzare la realtà sperimentale in formule dovrebbe tener conto anche del fatto che, a differenza di quanto avviene per la fisica, non è lecito supporre l'esistenza di leggi naturali univoche capaci di regolare gli eventi coi quali abbiamo a che fare, i quali dipendono *anche* da fattori artificiali, come la qualità di un calcestruzzo o l'onestà di un fornitore, o se un operaio abbia o non abbia dormito a sufficienza, o se abbia o non abbia nozione delle ricadute di quello che fa in un cantiere ed abbia quindi piegato o no a 135° una staffa, oppure aggiunto o no acqua all'ultimo calcestruzzo rimasto nell'autobetoniera.

Chi di noi ingegneri ha scelto di fare ricerca, non sta facendo quello che fanno i fisici, non sta cercando leggi naturali di valore generale. Sta cercando di mettere a punto modelli che "spieghino" la realtà sperimentale, al fine di pervenire a formule che possano essere usate *correntemente* per progettare e per verificare le costruzioni. Correntemente. L'esigenza della semplicità e della eleganza, della pulizia formale non è minore che nell'ambito scientifico stretto, anzi, è forse maggiore. Infatti, quei modelli saranno impiegati da ingegneri, geometri, architetti, e, indirettamente, da maestranze scarsamente qualificate, e quindi abbiamo uno specifico interesse che siano semplici, applicabili, controllabili e dominabili. Altrimenti sono inutili, servono solo a far vedere quanto è "bravo" chi li ha proposti. Se poi le formule proposte sono complicate e otten-



gono risultati ingegneristicamente simili a quelli ottenuti da formule diverse ma molto più semplici, non c'è alcun dubbio che sarebbe preferibile adottare queste piuttosto che quelle. Il nostro scopo è simile a quello degli scienziati nel senso che anche noi dobbiamo impiegare favole (o con parola più nobile: modelli), per sposare la realtà sperimentale, ovvero utilizzare modelli per realizzare costruzioni affidabili, ma non abbiamo alcuna legge fisica da ricercare, per quanto ignota essa sia. Alle leggi fisiche, potenzialmente atte a descrivere una parte del problema, si sovrappongono fatti che con la natura nulla hanno a che fare. Ne consegue che i nostri modelli non saranno modelli della realtà fisica, ma saranno modelli di un complicato groviglio di realtà fisica eventi aleatori ed attività umana, di comportamenti ripetibili e sperimentalmente misurabili e di fattori unici ed irripetibili, che pure dovremo in qualche modo tenere in conto.

Tutte le grandezze che adoperiamo non esistono in realtà, ma sono compiacenti semplificazioni. Tutte le grandezze che adoperiamo sono note a meno di errori in parte impossibili da quantificare. Tutto quello che facciamo, ad ogni piè sospinto, trascura qualcosa. Il nostro scopo non è valutare la risposta "reale" (che richiederebbe un ben diverso livello di conoscenza), ma pervenire a risultati che siano adeguati allo scopo, ovvero che ci consentano di ottenere in modo ragionato e ripetibile, motivato e controllabile, un progetto o un giudizio che risponda a certi requisiti di sicurezza e di affidabilità, con ridotti sovracosti rispetto alla soluzione puramente ideale di costi minimi.

E' fondamentale, a questo proposito, il requisito della ragionevolezza e della motivabilità, requisiti che richiedono, implicitamente, modelli e giudizi di merito, e quindi "ingegneri". Diversamente sarebbe possibile costruire un gigantesco programma per computer e la progettazione sarebbe cosa automatizzabile.

Il fatto che sia possibile valutare una qualche forma di risposta "reale" e non solo una possibile risposta "convenzionale" viene sorprendentemente propugnato dai più distratti assertori di un nuovo filone di calcoli pseudo deterministici, un filone che paradossalmente fa capo proprio all'approccio "probabilistico" o, peggio ancora, all'approccio "semiprobabilistico", convinti assertori della possibilità di "calcolare la probabilità di collasso delle strutture" o di progettare sulla base di "desiderati gradi di probabilità di collasso". La cosa è paradossale, perché l'approccio probabilistico, un nobile filone delle scienze applicate, nasce proprio dalla constatazione che i modelli *non sono* la realtà fisica e non hanno alcuna speranza di confondersi con essa.

Su questo sembra necessario dire qualcosa di specifico, data la estrema attualità dell'argomento ed il polverone di equivoci che viene diffuso da testi non sempre completamente sinceri sul tema.

### 1.3 Modelli e probabilistica

A parere di chi scrive la "probabilità di collasso" di una struttura non è in alcun modo valutabile se non facendo uso direttamente di modelli convenzionali al pari di quelli deterministici, a loro volta soggetti ad incertezze per loro stessa natura non pienamente quantificabili. In altre parole il numero che noi definiamo "probabilità di collasso" è una invenzione come l'elettrone o Pinocchio, non dissimile da tutte le altre invenzioni tipiche di un approccio tradizionale.

Il fatto che sia possibile "calcolare la probabilità di collasso" o anche solo "valutare la probabilità di collasso" è smentito dagli stessi esperti di probabilistica applicata all'ingegneria strutturale [14], i quali precisano che la reale performance strutturale è ignota, l'unica cosa che si può fare è sorvegliare il "processo":

"Così il maggior numero di crolli strutturali sono ascritti all'errore umano, un fattore che non è tenuto in conto dalla teoria [della affidabilità strutturale]. Sembrerebbe, allora, che la teoria sia di poca utilità come descrizione dei processi del mondo reale. Indipendentemente da quanto ciò possa essere vero, il proposito della teoria non è la descrizione delle performance strutturali, ma il controllo del processo inteso a produrre strutture affidabili in modo efficiente."

Dunque: "Il proposito della teoria non è la descrizione delle performance strutturali ma il controllo del processo inteso a produrre strutture affidabili in modo efficiente".

Infatti, a tacer d'altro, la teoria non tiene in conto gli errori umani, i quali però contribuiscono in modo rilevante ad influire sulla probabilità di collasso misurabile sperimentalmente, e quindi essa non può valutare probabilità di collasso assolute. Gli errori umani non sono, tuttavia, gli unici fattori che non vengono valutati dalla teoria, il che ci porta a dire con maggior forza che la teoria stessa calcola probabilità di collasso puramente convenzionali. Diversamente dovremmo come minimo attenderci fattori  $\gamma$  che tengano in conto la qualificazione di chi progetta e di chi realizza, che tengano in conto magari la fedina penale o la storia pregressa di chi fornisce e così via.

Il corretto punto di vista di chi adotta un approccio probabilistico, è ben sintetizzato dagli autorevoli Autori precedenti nel seguente passo:



“Il problema del progetto strutturale razionale è mettere a punto una procedura che produca un progetto ottimale, cioè un progetto che minimizzi il valore atteso presente del costo totale.

È irrilevante che questa procedura sia o meno essa stessa razionale. Può essere invero razionale consultare un rabadomante prima di trivellare un pozzo, se c'è appropriata evidenza statistica di un costo totale atteso ridotto. Similmente, un metodo di progetto non è necessariamente irrazionale solo perché contiene approssimazioni, fattori aleatorii, o anche elementi irrazionali. Lind e altri (1964) definirono il problema del progetto razionale di una norma come quello di trovare un insieme di valori migliori per i fattori dei carichi e delle resistenze. Essi suggerirono una procedura iterativa, considerando la norma come una “scatola nera” capace di controllare le dimensioni delle membrature, date le proporzioni strutturali, e da qui controllare la sicurezza strutturale ed il costo. La procedura che essi suggerirono fu meramente una versione sistematica dell'effettivo processo di “trial and error” seguito nello sviluppo delle normative di progetto strutturale, ma questo approccio sembra essere stato troppo radicale per l'epoca.”

Questa descrizione dell'approccio probabilistico nel problema del calcolo strutturale ha un enorme pregio: la sincerità. Essa spiega molto bene il punto di vista di chi la propone, un punto di vista che non vuole nascondere l'ignoranza nella quale ci troviamo, bensì, riconoscendola, vuol trarre da essa il massimo vantaggio, in un approccio “laico” e pragmatico che sarebbe senz'altro convincente, se fosse seguito con coerenza sino alle sue estreme conseguenze.

L'approccio proposto, quello a scatola nera, è logico e sensato, ed è tra l'altro un approccio ben noto a chi si occupa di sistemi complicati, per i quali sia difficile proporre modelli sufficientemente attendibili. Approccio a “scatola nera” vuol dire rinunciare a “spiegare” i fenomeni che misuriamo e limitarci a cercare formule o modelli in grado di sposare (e predire) le risultanze sperimentali.

Un approccio di questo tipo non necessita idealmente di alcun modello fisico, perché può limitarsi a constatare le diverse probabilità di eventi negativi ed il diverso grado di correlazione che questi hanno con i dati di partenza.

Se vi fossero evidenze statistiche in grado di mostrare che consultare un rabadomante porta a trovare più rapidamente l'acqua, noi dovremmo utilizzare un rabadomante anche se la cosa potrebbe apparirci insensata. Il fatto è che noi non siamo in grado di escludere che ci siano fatti a noi sconosciuti in grado di spiegare questa circostanza per noi apparentemente così strana. Inutile cercare ragioni: constatiamo statisticamente che consultare un rabadomante conviene? E allora consultiamo il rabadomante.

Ecco quindi perchè l'approccio probabilistico potrebbe in linea di principio

essere il metodo migliore che abbiamo per organizzare i dati a nostra disposizione: esso rinuncia a darsi modelli deterministici, e misura solo i fatti sperimentali, senza quindi perdere nulla della risposta reale, della quale si terrebbe conto in maniera onnicomprensiva.

Questo approccio idealmente delineato come pragmatico e potenzialmente foriero di grandi vantaggi entra però in crisi, a giudizio di chi scrive, per alcune sostanziali ragioni che verranno qui sinteticamente enumerate e poi brevemente illustrate:

- ◆ Non esiste una probabilità oggettiva, è illusorio normare coefficienti probabilistici eguali per tutti;
- ◆ Esistono fenomeni aleatori dei quali è intrinsecamente impossibile avere campionature statistiche attendibili.
- ◆ Il metodi probabilistici attualmente praticati non sono metodi realmente probabilistici poiché si immettono nei metodi di calcolo tradizionali, ereditandone le semplificazioni e le forzature, e limitandosi a trattare come aleatorie alcune grandezze che in questi figurano;
- ◆ Le campionature statistiche di cui oggi disponiamo sono assai lontane dall'essere complete ed attendibili, e ciò per ragioni cronologiche e storiche, ma anche per ragioni intrinsecamente ineliminabili.

### 1.3.1 *Probabilità soggettiva e probabilità oggettiva*

Esiste una corrente di pensiero epistemologico molto autorevole che fa capo a De Finetti ed a Ramsey<sup>3</sup>, che nega che il calcolo delle probabilità sia oggettivo, e che definisce appunto la probabilità di un evento come il grado di fiducia che un individuo, *sulla base delle conoscenze di cui dispone in un determinato momento*, nutre nel verificarsi dell'evento in questione.

Ciò ha portato De Finetti a coniare il famoso aforisma (al quale era particolarmente affezionato):

“la probabilità non esiste”



**Figura 1.1**  
Bruno De Finetti,  
nato a Innsbruck  
nel 1906 morto a  
Roma nel 1985